Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

19 Ιανουαρίου 2022

Θέμα 1. [0.6+0.6+0.8+0.8=2.8]

(α΄) Έστω $\|\bar{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ για $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

(β΄) Έστω $\bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}\}$ είναι κλειστό.

(γ΄) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y|\sqrt{|x|}}{|x| + y^2}$, αν υπάρχει.

(δ΄) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, γύρω από το σημείο $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$.

Θέμα 2. [1+0.6=1.6]

Έστω η $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\bar{f}(x, y) = \begin{cases} (x - y, y + x), & (x, y) \in B(\bar{0}, 1), \\ (1, 1), & \text{παντού αλλού.} \end{cases}$

(α΄) Υπάρχουν $(x_0, y_0) \in \partial B(\bar{0}, 1)$ στα οποία η $\bar{f}$ είναι συνεχής; Αν ναι, ποια είναι αυτά;

(β΄) Υπάρχουν $(x_0, y_0) \in \partial B(\bar{0}, 1)$ στα οποία η $g(x, y) := \|\bar{f}(x, y)\|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, είναι συνεχής; Αν ναι, ποια είναι αυτά;

Θέμα 3. [0.8+0.8+1+0.6=3.2]

Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2}, & (x, y) \in S := [-1, 1] \times [-1, 1], \\ \sqrt{2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S. \end{cases}$

(α΄) Βρείτε σε ποια σημεία $(x_0, y_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ η f είναι συνεχής και σε ποια είναι διαφορίσιμη.

(β΄) Με εξαίρεση τα σημεία στα οποία η f είναι μεν συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμη (αν υπάρχουν), βρείτε σε κάθε (άλλο) $(x_0, y_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ όλες τις κατευθυνόμενες παραγώγους που υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί).

(γ΄) Για ποιες στάθμες $c \in \mathbb{R}$ το αντίστοιχο σύνολο στάθμης c είναι πλήρης κύκλος με θετική ακτίνα;

(δ΄) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{3})$ του γραφήματος της f.

Θέμα 4. [2.4]

Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \\ 2, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \setminus \mathbb{Z}^2, \\ x^2 + y^2, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \setminus \mathbb{Z}^2. \end{cases}$

Βρείτε τα σημεία ακροτάτων της f, χαρακτηρίστε τα (ως σημεία μεγίστου ή ελαχίστου, γνησίων ή μη, τοπικών ή ολικών) και δώστε τις αντίστοιχες ακρότατες τιμές της f σε αυτά. (*Υπόδειξη:* Συνιστάται μία «χαρτογράφηση» των σημείων του $\mathbb{R}^2$ όπου η f παίρνει τις διάφορες τιμές της.)

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!